

49 Простейшие задачи в координатах

а) **Координаты середины отрезка.** В системе координат  $Oxyz$  отметим точку  $A$  с координатами  $(x_1; y_1; z_1)$  и точку  $B$  с координатами  $(x_2; y_2; z_2)$ . Выразим координаты  $(x; y; z)$  середины  $C$  отрезка  $AB$  через координаты его концов (рис. 128).

Так как точка  $C$  — середина отрезка  $AB$ , то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \quad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  равны соответствующим координатам трех точек  $C$ ,  $A$  и  $B$ :  $\vec{OC} \{x; y; z\}$ ,  $\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$ . Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

б) **Вычисление длины вектора по его координатам.** Докажем, что длина вектора  $\vec{a} \{x; y; z\}$  вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

Отложим на осях координат векторы  $\vec{OA}_1 = x\vec{i}$ ,  $\vec{OA}_2 = y\vec{j}$ ,  $\vec{OA}_3 = z\vec{k}$  и рассмотрим вектор  $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$  (рис. 129). Длина

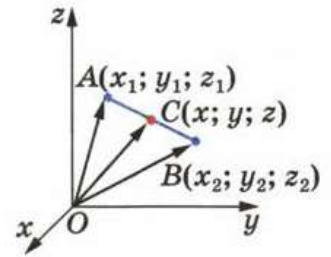


Рис. 128

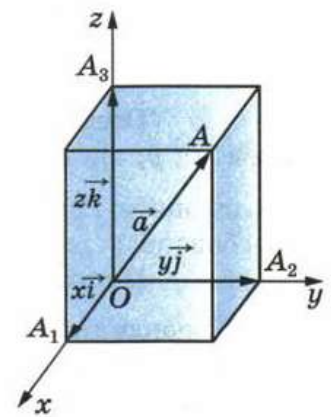


Рис. 129

вектора  $\vec{OA}$  выражается через длины векторов  $\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$  и  $\vec{OA}_3$  следующим образом:

$$|\vec{OA}| = \sqrt{|\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2}. \quad (4)$$

В самом деле, если точка  $A$  не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 129), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда:  $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$ . Во всех других случаях расположения точки  $A$  (точка  $A$  лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как  $|\vec{OA}_1| = |xi| = |x|$ ,  $|\vec{OA}_2| = |y|$ ,  $|\vec{OA}_3| = |z|$  и  $\vec{OA} = \vec{a}$ , то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) **Расстояние между двумя точками.** Рассмотрим две произвольные точки: точку  $M_1$  с координатами  $(x_1; y_1; z_1)$  и точку  $M_2$  с координатами  $(x_2; y_2; z_2)$  (рис. 130). Выразим расстояние  $d$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор  $\vec{M_1M_2}$ . Его координаты равны  $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ . По формуле (3)  $|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Но  $d = |\vec{M_1M_2}|$ . Таким образом, расстояние между точками  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

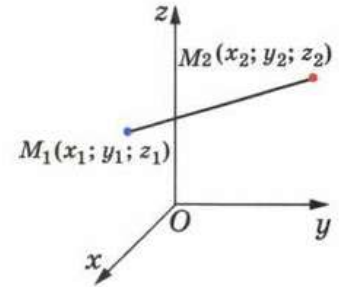


Рис. 130

## 19

Даны три точки:  $A(5; -3; 2)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $C(2; -2; 0)$ .

а) Найдите координаты вектора  $\vec{AB}$ .

б) Разложите по координатным векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  вектор  $\vec{BC}$ .

Решение.

а)  $\vec{AB} \{0 - \underline{\quad}; \underline{\quad} - (-3); \underline{\quad}\}$ , т. е.  $\vec{AB} \{\underline{\quad}; \underline{\quad}; \underline{\quad}\}$ ;

б)  $\vec{BC} \{2 - \underline{\quad}; \underline{\quad} - 1; \underline{\quad}\}$ , т. е.  $\vec{BC} \{\underline{\quad}; \underline{\quad}; \underline{\quad}\}$ .

Следовательно,  $\vec{BC} = 2\vec{i} - \underline{\quad}\vec{j} + \underline{\quad}\vec{k}$

Ответ.

а)  $\underline{\hspace{2cm}}$

б)  $\underline{\hspace{2cm}}$

Точки  $A(3; 0; -2)$ ,  $B(0; -3; 1)$  и  $C(1; -2; 0)$  являются вершинами параллелограмма  $ABCD$ . Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Решение.

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является \_\_\_\_\_ каждой из диагоналей, поэтому достаточно найти координаты середины \_\_\_\_\_  $AC$ :

$$x = \frac{1}{2}(3 + \text{---}) = \text{---}; y = \text{---} = \text{---}; z = \text{---} = \text{---}$$

Ответ. (---; ---; ---).